Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 26, núm. 2, 2011. Pàg. 137–163. DOI: 10.2436/20.2002.01.37

L'aplicabilitat de la fórmula d'integració per parts en un espai gaussià

Eulàlia Nualart

In memoriam Paul Malliavin (1925–2010)

Resum: Durant els anys setanta, el matemàtic francès Paul Malliavin va revolucionar la teoria de les probabilitats quan va introduir el càlcul de variacions estocàstic que avui porta el seu nom. Malliavin va construir una estructura diferenciable en un espai gaussià de manera que la integral d'Itô fos un objecte diferenciable. La seva motivació principal va ser utilizar aquesta teoria per donar una demostració probabilística del teorema de Hörmander per a operadors hipoel·líptics de segon ordre. Una de les eines clau d'aquest càlcul diferencial estocàstic és la seva fórmula d'integració per parts, que fa intervenir dos operadors, la derivada i el seu adjunt, anomenat *integral de Skorohod*. Introduirem les nocions bàsiques del càlcul de Malliavin i donarem algunes de les seves aplicacions a tres àrees diferents —encara que molt relacionades— de les matemàtiques, que són el càlcul de probabilitats, l'estadística i les matemàtiques financeres.

Paraules clau: fórmula d'integració per parts, derivada de Malliavin, integral de Skorohod, càlcul de Malliavin i aplicacions.

Classificació MSC2010: Primària: 60H07, 60J60; secundària: 62F12, 91B28.

1 Introducció

Paul Malliavin (1925–2010) va ser professor de la Universitat Pierre et Marie Curie del 1962 al 1993, emèrit des del 1993 i membre de l'Acadèmia de Ciències francesa des del 1979. Malliavin va ser un dels matemàtics més fecunds del segle passat. La seva recerca es va centrar en l'anàlisi harmònica, el càlcul de probabilitats, les funcions de variable complexa i la teoria de l'aproximació. Va llegir la tesi, dirigida per Szolem Mandelbrojt, el 1954. El seu reconeixement internacional li va arribar l'any 1959 en resoldre un problema d'anàlisi harmònica plantejat per Beurling i Gelfand durant els anys trenta.

Paul Malliavin (1925–2010).

En els anys setanta, Paul Malliavin va revolucionar la teoria de les probabilitats quan va introduir el càlcul de variacions estocàstic que avui porta el seu nom. Els seus primers articles sobre aquest tema van ser [12, 13, 14] publicats l'any 1978. La idea clau que va tenir va ser construir una estructura diferenciable sobre l'espai de probabilitat d'un moviment brownià de forma que la integral d'Itô fos un objecte diferenciable. La seva motivació principal va ser utilitzar aquesta teoria per obtenir una demostració probabilística del teorema de Hörmander sobre operadors hipoel·líptics de segon ordre. A l'octubre del 1975, Paul Malliavin va impartir el curs «Operadors el·líptics i equacions diferencials estocàstiques» a la Universitat de Barcelona.

Després de la seva invenció, probabilistes com Bismut, Shigekawa, Stroock, Ikeda i Watanabe, entre d'altres, van publicar diferents treballs en què van desenvolupar les idees de Malliavin sobre el càlcul de variacions estocàstic en diferents direccions. A partir d'aquest moment, el càlcul de Malliavin va ser molt utilitzat i ha estat desenvolupat al llarg dels anys, i ha acabat donant lloc a diferents aplicacions. Una de les eines clau d'aquest càlcul diferencial és la seva fórmula d'integració per parts, en la qual intervenen dos operadors, l'operador derivada i el seu adjunt, anomenat *integral de Skorohod*. Començarem per definir aquests dos operadors per demostrar, tot seguit, la fórmula d'integració per parts. Després, donarem tres aplicacions d'aquesta fórmula a tres àrees diferents —encara que molt relacionades— de les matemàtiques, que són el càlcul de probabilitats, l'estadística i les matemàtiques financeres.

2 Conceptes previs

Abans d'introduir el càlcul de Malliavin, definirem alguns conceptes previs de probabilitats.

Treballarem sempre sobre un espai de probabilitat, que és una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, on Ω és el conjunt mostral de tots els resultats possibles de l'experiment aleatori, $\mathcal{F}$ és una σ-àlgebra de subconjunts de Ω i P és una mesura de probabilitat sobre $\mathcal{F}$.

Sobre un espai de probabilitat podem definir una variable aleatòria real com una aplicació $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ amb la propietat de ser mesurable, és a dir, tal que l'antiimatge de qualsevol conjunt obert de $\mathbb{R}$ és un element de la σ-àlgebra $\mathcal{F}$. Observem que, per a cada element $\omega \in \Omega$, $F(\omega)$ és un nombre real.

Direm que una variable aleatòria F *té densitat* si existeix una funció $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ positiva, integrable amb $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ i tal que

$$\mathrm{P}(a \leq F \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{per a tot } a \leq b.$$

Llavors f s'anomena *densitat de F*.

La densitat més coneguda és la que col·loquialment es coneix com a *campana de Gauss*. Una variable aleatòria que té aquesta densitat s'anomena *gaussiana*. Més precisament, direm que una variable aleatòria té una llei gaussiana d'esperança $\mu \in \mathbb{R}$ i variància $\sigma^2 > 0$, que denotarem per $N(\mu, \sigma^2)$, si la seva densitat ve donada per

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{per a tot } x \in \mathbb{R}.$$

Si afegim el caràcter temporal a una variable aleatòria obtenim el concepte de *procés estocàstic* definit en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Aquest es defineix com una aplicació $u\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ tal que per a cada $t \geq 0$ fixat, l'aplicació $u(t)\colon \omega \in \Omega \mapsto u(t, \omega)$ és una variable aleatòria definida en el mateix espai de probabilitat. A més, l'aplicació $t \mapsto u(t, \omega)$ s'anomena *trajectòria associada a l'element* $\omega \in \Omega$.

Els increments d'un procés estocàstic són les diferències $u(t) - u(s)$ entre els valors presos pel procés en diferents valors de temps $s < t$. Direm que un procés estocàstic té els increments independents si les variables aleatòries $u(t) - u(s)$ i $u(r) - u(z)$ són independents, si els intervals $[s, t[$ i $[z, r[$ són disjunts, i si tot nombre finit d'increments en intervals disjunts dos a dos són mútuament independents.

Direm que un procés estocàstic és continu si les seves trajectòries són contínues quasi segurament (s'utilitza la notació abreujada q. s.), és a dir, l'aplicació $t \mapsto u(t, \omega)$ és contínua per a tot $\omega \in \Omega$ excepte per a un subconjunt de ω de P-mesura zero.

L'exemple més conegut de procés estocàstic continu és el procés de Wiener, que fou rigorosament construït i estudiat per Norbert Wiener durant els anys vint, i per això porta el seu nom. Però el 1905 ja va ser proposat per Albert Einstein com a model per al fenomen físic anomenat *moviment brownià*, i que fa referència al moviment aleatori de partícules en suspensió en un líquid. Aquest fenomen va ser descobert pel botànic Robert Brown el 1827, quan va observar en un microscopi el moviment de partícules de pol·len a l'aigua. En la literatura s'utilitza la nomenclatura de *moviment brownià* com a sinònim de *procés de Wiener*. Es defineix de la manera següent.

Un *moviment brownià* $(B(t), t \geq 0)$ és un procés estocàstic amb increments independents tal que $B(0) = 0$, les trajectòries $t \to B(t)$ són contínues q. s. i els increments $B(t) - B(s)$ són variables aleatòries amb llei gaussiana d'esperança 0 i variància $t - s$.

En l'observació del moviment de partícules, la variable $B(t)$ s'interpreta com la posició d'una partícula a l'instant $t \geq 0$.

La filtració d'un moviment brownià és el conjunt de σ-àlgebres $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ tals que per a cada $t \geq 0$ fixat, $\mathcal{F}_t$ està generada per les variables $s \mapsto B(s)$, on $s \in [0,t]$ i els conjunts de P-mesura zero de $\mathcal{F}$. És a dir, per a cada $t \geq 0$ fixat, $\mathcal{F}_t$ conté tota la informació sobre les trajectòries del brownià fins al temps t.

Direm que un procés estocàstic $(u(t), t \geq 0)$ és adaptat a la filtració del moviment brownià $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ si per a cada $t \geq 0$ fixat, $u(t)$ és $\mathcal{F}_t$-mesurable, i utilitzarem la notació $u(t) \in \mathcal{F}_t$.

Per a un subconjunt dels processos estocàstics adaptats, es pot definir la seva integral respecte del moviment brownià, que és l'anomenada *integral d'Itô*. Aquest subconjunt es defineix de la manera següent:

Per $T > 0$ fixat, considerem l'espai de processos estocàstics reals i de quadrat integrable:

$$L^2([0,T] \times \Omega) = \Big\{ u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \\ \|u\|_2^2 := \mathrm{E}\Big[\int_0^T |u(t,\omega)|^2 \,\mathrm{d}t\Big] < \infty \Big\}.$$

Considerem el subespai vectorial $L_a^2([0,T] \times \Omega) \subset L^2([0,T] \times \Omega)$ de processos adaptats a la filtració del moviment brownià $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$. Observem que $L_a^2([0,T] \times \Omega)$ és un espai vectorial complet i, per tant, hereda l'estructura hilbertiana de $L^2([0,T] \times \Omega)$.

La integral d'Itô d'un procés estocàstic real adaptat i de quadrat integrable és la integral d'aquest procés respecte d'un moviment brownià. Aquesta integral es construeix per pas al límit d'una successió treta d'un subconjunt dens de $L_a^2([0,T] \times \Omega)$ de la manera següent:

Considerem el conjunt de processos elementals

$$\mathcal{E} = \Big\{ u(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}(t), 0 \leq t_1 < \cdots < t_{n+1} \leq T, \\ F_i \in \mathcal{F}_{t_i} \text{de quadrat integrable} \Big\}.$$

El conjunt $\mathcal{E}$ és dens dins de $L_a^2([0,T] \times \Omega)$. Definim la integral d'Itô d'un procés elemental $u \in \mathcal{E}$ respecte d'un moviment brownià $(B(t), t \in [0,T])$ com

$$\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}B(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i\big(B(t_{i+1}) - B(t_i)\big).$$

Això defineix un funcional lineal de $\mathcal{E} \subset L_a^2([0,T] \times \Omega)$ prenent valors a $L^2(\Omega)$

amb les propietats següents:

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}B(t)\Big] = 0, \qquad \mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}B(t)\Big)^2\Big] = \mathrm{E}\Big[\int_0^T |u(t)|^2\,\mathrm{d}t\Big]. \qquad (2.1)$$

La segona propietat s'anomena *propietat d'isometria* i ens permet estendre de manera única la integral d'Itô de processos estocàstics en $L_a^2([0,T]\times\Omega)$ com a límit en $L^2(\Omega)$ d'una successió de processos elementals en $\mathcal{E}$ i amb les mateixes propietats (2.1).

En el cas que f sigui una funció (determinista) en $L^2([0,T])$, la seva integral respecte d'un moviment brownià s'anomena *integral de Wiener* i és una variable aleatòria amb llei gaussiana, d'esperança 0 i variància $\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$. La seva construcció és similar a la de la integral d'Itô. En efecte, considerem el conjunt de funcions esglaonades

$$\mathcal{A} = \Big\{f(t) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(t),\ 0 \le t_1 < \cdots < t_{n+1} \le T,\ a_i \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Definim la integral de Wiener d'una funció esglaonada respecte d'un moviment brownià $(B(t), t \in [0,T])$ com

$$\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}B(t) = \sum_{i=1}^n a_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

Utilitzant la definició de moviment brownià, és fàcil veure que això defineix una variable aleatòria gaussiana d'esperança 0 i variància $\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$. Com que el conjunt $\mathcal{A}$ és dens dins de $L^2([0,T])$, podem estendre per continuïtat aquest funcional lineal a una única aplicació sobre $L^2([0,T])$ que satisfà la propietat d'isometria

$$\mathrm{E}\Big[\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}B(t)\Big] = \int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Com que el límit en $L^2(\Omega)$ de variables aleatòries gaussianes és gaussià, tenim que $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}B(t)$ és una variable aleatòria gaussiana d'esperança 0 i variància $\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

3 La derivada de Malliavin, l'adjunt i la fórmula d'integració per parts

A continuació definirem els dos operadors bàsics del càlcul de Malliavin, que són l'operador derivada i el seu adjunt, anomenat *integral de Skorohod*. Tot seguit, demostrarem la fórmula d'integració per parts, que és un element clau d'aquesta teoria. Una presentació extensa del càlcul de Malliavin es pot trobar, per exemple, en [15, 22].

El concepte de *derivada de Malliavin* es basa en el concepte clàssic de *derivada direccional*. Comencem, doncs, per recordar aquest concepte. Considerem una funció que pren valors reals $f\colon U \to \mathbb{R}$, on U és un obert de $\mathbb{R}^n$. Llavors, si existeix, la derivada direccional de la funció f en el punt $x \in U$ i en la direcció $y \in \mathbb{R}^n$ es defineix com el límit següent:

$$D_y f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon y) - f(x)}{\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} f(x+\epsilon y)\Big|_{\epsilon=0}.$$

El concepte de *derivada direccional* es pot estendre al cas que $\mathbb{R}^n$ se substitueix per un espai de Banach. Sigui $f\colon U \to \mathbb{R}$ una funció on U és un obert d'un espai de Banach X. Llavors, si existeix, definim la derivada direccional de f en el punt $x \in U$ i en la direcció $y \in X$ com

$$D_y f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} f(x+\epsilon y)\Big|_{\epsilon=0}.$$

Un exemple clàssic d'espai de Banach és $X = C_0([0,T])$, l'espai format per les funcions contínues $\omega\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ tals que $\omega(0) = 0$ amb la norma del suprem

$$\|\omega\|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} |\omega(t)|.$$

Un cop recordat el concepte de *derivada direccional*, el nostre objectiu és definir una derivada direccional aplicada a variables aleatòries en comptes de funcions. Per fer-ho, considerarem només aquelles variables aleatòries definides en l'anomenat *espai de Wiener* o *espai de probabilitat canònic* del moviment brownià, que es construeix tal com explicarem tot seguit.

Observem que en la definició de moviment brownià de la secció anterior, l'espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ en el qual considerem aquest procés estocàstic pot ser qualsevol. Ara bé, com que les trajectòries d'un moviment brownià són contínues q. s., podem prendre com espai mostral Ω el conjunt $C_0([0,T])$. En efecte, n'hi ha prou de considerar l'aplicació

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow C_0([0,T]) \\ \omega &\mapsto B_\cdot(\omega) = w(\cdot). \end{aligned}$$

És a dir, per a cada $t \geq 0$, $B_t(\omega)$ és la funció ω avaluada en t. D'altra banda, com a σ-àlgebra $\mathcal{F}$ podem considerar la σ-àlgebra de Borel de $C_0([0,T])$, és a dir, aquella generada pels conjunts oberts relatius a l'estructura d'espai mètric separable i complet. La mesura de probabilitat P és, llavors, la llei del moviment brownià anomenada *mesura de Wiener*.

L'espai de probabilitat del moviment brownià $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ construït així s'anomena *espai de Wiener* i les variables aleatòries en aquest espai són les avaluacions $w(t)$.

Utilitzant aquesta identificació podem definir la derivada direccional d'una variable aleatòria en l'espai de Wiener. Observem que en aquest cas derivem una funció aleatòria respecte del paràmetre aleatori ω.

Sigui $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria definida sobre l'espai de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Considerem una funció de quadrat integrable $g \in L^2([0,T])$ i la funció contínua $\gamma \in \Omega$ definida com

$$\gamma(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s. \tag{3.1}$$

Llavors, si existeix, definim la derivada direccional de F en el punt $\omega \in \Omega$ i en la direcció $\gamma \in \Omega$ com

$$D_\gamma F(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon} F(\omega + \epsilon\gamma)\bigg|_{\epsilon=0}. \tag{3.2}$$

Observem que hem definit la derivada direccional només per a direccions que són funcions contínues del tipus (3.1). El conjunt de funcions contínues del tipus (3.1) és un espai de Hilbert que s'anomena *espai de Cameron-Martin* i es defineix com

$$\mathcal{H} = \left\{\gamma \in \Omega :\ \exists\, g \in L^2([0,T]) : \gamma(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Observem que per a cada direcció $\gamma \in \mathcal{H}$, $D_\gamma F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una variable aleatòria.

Direm que una variable aleatòria $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ en l'espai de Wiener $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ és derivable en el sentit de Malliavin si es compleix que:

- Per a tota direcció $\gamma \in \mathcal{H}$, la derivada direccional de F, $D_\gamma F$, existeix com el límit de (3.2) en probabilitat i la funció $\epsilon \mapsto F(\omega + \epsilon\gamma)$ és absolutament contínua q. s. respecte de la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
- Existeix un procés estocàstic $\psi \in L^2([0,T] \times \Omega)$ tal que

$$D_\gamma F(\omega) = \int_0^T \psi(t,\omega) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

En el cas que les dues condicions es compleixin, definim la *derivada de Malliavin* de F com el procés estocàstic $DF \in L^2([0,T] \times \Omega)$ donat per

$$D_t F(\omega) = \psi(t,\omega), \quad \text{per a tot } t \in [0,T] \text{ i } \omega \in \Omega.$$

L'espai de variables aleatòries derivables es denota per $\mathcal{D}^{1,2}$. Per tant, hem definit un operador lineal $D\colon \mathcal{D}^{1,2} \subset L^2([0,T]) \to L^2([0,T] \times \Omega)$.

Podem iterar el concepte de derivada direccional i definir la derivada de Malliavin d'ordre $k \geq 1$ d'una variable aleatòria $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que denotarem per $D^k F$. Denotem per $\mathcal{D}^{k,2}$ l'espai de variables aleatòries derivables k vegades i obtenim un operador lineal $D\colon \mathcal{D}^{k,2} \subset L^2([0,T]) \to L^2([0,T]^k \times \Omega)$. Per $p > 1$, denotem per $\mathcal{D}^{k,p}$ l'espai de variables aleatòries derivables k vegades i tals que totes les seves derivades pertanyen a l'espai $L^p(\Omega)$.

Una propietat important de la derivada és l'anomenada regla de la cadena $D\big(f(F)\big) = f'(F)DF$, que es compleix si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és una funció derivable amb derivada fitada i F és una variable aleatòria dins de $\mathcal{D}^{1,p}$ per a algun $p > 1$. De fet, si f és una funció Lipschitz i F és una variable aleatòria amb densitat, llavors la regla de la cadena també es compleix, però la seva demostració és més delicada.

A continuació, calcularem la derivada de Malliavin d'una integral de Wiener

$$F = \int_0^T f(s)\,\mathrm{d}B(s), \quad f \in L^2([0,T]).$$

Hem vist en la secció anterior que F és una variable aleatòria gaussiana centrada i de variància $\int_0^T f^2(s)\,\mathrm{d}s$. D'altra banda, podem considerar la integral de Wiener com una variable aleatòria en l'espai canònic del moviment brownià. Per fer-ho, considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} &\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\omega \mapsto F(\omega) = \int_0^T f(s)\,\mathrm{d}w(s). \end{aligned}$$

És a dir, per a cada trajectòria del moviment brownià, es té un valor de la variable avaluada en aquella trajectòria. Observem, però, que aquesta interpretació de la integral de Wiener és purament intuïtiva, ja que el fet que $F(\omega) = \int_0^T f(s)\,\mathrm{d}w(s)$ per a $f \in L^2([0,T])$ i $\omega \in \Omega$, només es compleix, per exemple, si f és una funció de variació fitada (a través de la fórmula d'integració per parts d'anàlisi), o bé si ω pertany a l'espai de Cameron-Martin $\mathcal{H}$.

A continuació, prenem $\gamma \in \mathcal{H}$, és a dir, de la forma $\gamma(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ on $g \in L^2([0,T])$. Llavors, per a tot $\epsilon > 0$ i $\omega \in \Omega$ tenim

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega+\epsilon\gamma)-F(\omega)}{\epsilon} &= \frac{\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}w(s) + \epsilon\int_0^T f(s)\,\mathrm{d}\gamma(s) - \int_0^T f(s)\,\mathrm{d}w(s)}{\epsilon} = \\ &= \int_0^T f(s)g(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Observem que el terme de la dreta no depen de ϵ. Per tant, de la definició de derivada de Malliavin, deduïm que la derivada de F és la funció f, és a dir, per a tot $t \in [0,T]$ i $\omega \in \Omega$, $D_tF(\omega) = f(t)$. Per tant, en aquest cas, la derivada és una funció determinista. Per exemple, si $f = 1_{[0,1]}$, és a dir $F = B(1)$, llavors $D_tF = 1_{[0,1]}(t)$. De fet, la derivada de Malliavin d'una variable aleatòria gaussiana és sempre una funció determinista.

D'altra banda, si u és un procés estocàstic diferenciable en el sentit de Malliavin en cada instant, tenim que la derivada de Malliavin de la integral de Lebesgue del procés és la integral de la derivada del procés, és a dir,

$$D_t\left(\int_0^T u(s)\,\mathrm{d}s\right) = \int_0^T D_t u(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ja sabem, doncs, com actua la derivada de Malliavin sobre integrals de Wiener i sobre integrals de Lebesgue de processos estocàstics. El nostre objectiu següent és veure com actua la derivada sobre integrals d'Itô. Per fer-ho, necessitem introduir el concepte d'*operador adjunt de la derivada*. Aquest es denota per δ i actua sobre processos estocàstics en $L^2([0,T]\times\Omega)$. Donat un procés $u \in L^2([0,T]\times\Omega)$, $\delta(u)$ s'anomena *integral de Skorohod* de u i es defineix utilitzant la definició clàssica d'adjunt d'un operador.

- L'adjunt de la derivada és un operador δ definit en el seu domini $\operatorname{Dom}\delta \subset L^2([0,T]\times\Omega)$ amb valors en $L^2(\Omega)$. Direm que u pertany a $\operatorname{Dom}\delta$ si per a tota variable aleatòria F dins de $\mathcal{D}^{1,2}$, existeix una constant c que pot dependre de u tal que

$$\left| E\left[\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t \right] \right| \le c(u) \|F\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Si F pertany a $\mathcal{D}^{1,2}$ i u pertany a $\operatorname{Dom}\delta$, es compleix la relació de dualitat següent entre la derivada i la integral de Skorohod:

$$E[F\delta(u)] = E\left[\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t \right]. \tag{3.3}$$

De la seva definició deduïm que l'operador δ és lineal. A més, es compleix la propietat següent sobre la integral de Skorohod del producte d'un procés estocàstic i una variable aleatòria:

$$\delta(Fu) = F\delta(u) - \int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.4}$$

D'altra banda, es pot demostrar que si un procés estocàstic u de quadrat integrable és adaptat a la filtració del moviment brownià, llavors la seva integral de Skorohod coincideix amb la seva integral d'Itô, és a dir,

$$\delta(u) = \int_0^T u(t)\,\mathrm{d}B(t).$$

Per tant, en aquest cas, de cara a les aplicacions, podem utilitzar les tècniques conegudes del càlcul d'Itô per fer els càlculs necessaris. Ara bé, si el procés no és adaptat a la filtració del moviment brownià, podem intentar escriure'l com el producte d'una variable aleatòria i un procés adaptat. Llavors la fórmula (3.4) ens dóna una regla útil per calcular la seva integral de Skorohod, en la qual intervindrà la integral d'Itô del procés adaptat. Aquest és un truc que sovint s'utilitza a l'hora de fer càlculs concrets d'integrals de Skorohod, com veurem més endavant.

A més, la derivada de la integral de Skorohod d'un procés estocàstic compleix que

$$D_t(\delta(u)) = u(t) + \delta(D_t u).$$

En particular, si el procés és adaptat, obtenim que la derivada de la integral d'Itô d'aquest procés ve donada per

$$D_t\left(\int_0^T u(s)\,\mathrm{d}B(s) \right) = u(t) + \int_t^T D_t u(s)\,\mathrm{d}B(s).$$

Ja ho tenim tot a punt per demostrar la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin, que s'obté com a conseqüència de la regla de la cadena i la relació de dualitat entre l'operador derivada i el seu adjunt. Aquesta fórmula va ser demostrada per Malliavin en [12].

PROPOSICIÓ 1. *Siguin $F, G \colon \Omega \to \mathbb{R}$ dues variables aleatòries i u un procés estocàstic tals que F pertany a $\mathcal{D}^{1,2}$, $\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ q. s. i el procés estocàstic $Gu(\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t)^{-1}$ pertany a $\operatorname{Dom}\delta$. Sigui $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funció diferenciable amb derivada fitada. Llavors es té la fórmula d'integració per parts següent:*

$$\mathrm{E}[f'(F)G] = E[f(F)H_u(F,G)], \tag{3.5}$$

on $H_u(F,G)$ és la variable aleatòria dins de $L^2(\Omega)$ definida com

$$H_u(F,G) = \delta\left(Gu\left(\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\right).$$

En el càlcul de funcions reals, quan es parla de *fórmula d'integració per parts*, s'espera una fórmula del tipus $\int uv' = uv - \int u'v$. En el càlcul de Malliavin, l'apel·latiu *fórmula d'integració per parts* s'utilitza per marcar el fet que la fórmula (3.5) permet de deslliurar-nos de la derivada de f, a canvi d'afegir la variable aleatòria $H_u(F,G)$.

Observem que una vegada fixades les dues variables aleatòries F i G, el procés u que intervé en la fórmula (3.5) no té per què ser únic i el terme de l'esquerra no depèn de u. En la pràctica, sovint es pren $u = DF$ i $G = 1$, i llavors la fórmula s'escriu

$$\mathrm{E}[f'(F)] = \mathrm{E}\left[f(F)\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_2^2}\right)\right], \tag{3.6}$$

on

$$\|DF\|_2^2 = \mathrm{E}\left[\int_0^T |D_t F|^2\,\mathrm{d}t\right].$$

PROVA. Per la regla de la cadena tenim que $D(f(F)) = f'(F)DF$. Multiplicant pel procés u els dos costats de la igualtat i integrant s'obté que

$$\int_0^T D_t(f(F))u(t)\,\mathrm{d}t = f'(F)\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Multiplicant per la variable G, prenent esperances als dos costats de la igualtat i utilitzant la relació de dualitat (3.3) s'obté que

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[f'(F)G] &= \mathrm{E}\left[\int_0^T D_t(f(F))u(t)\,\mathrm{d}t\left(\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1} G\right] = \\ &= \mathrm{E}\left[f(F)\delta\left(Gu\left(\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t\right)^{-1}\right)\right],\end{aligned}$$

que demostra la fórmula (3.5). □

4 Aplicacions de la fórmula d'integració per parts

Des de la seva existència, el càlcul de Malliavin ha donat lloc a diverses aplicacions en diferents àrees de les matemàtiques. A continuació, veurem tres situacions diferents en què la fórmula d'integració per parts té un paper important. Començarem per un problema clàssic de la teoria de probabilitats que consisteix a donar criteris perquè una variable aleatòria tingui densitat i aquesta densitat sigui una funció infinitament derivable. Aquesta variable aleatòria pot ser, per exemple, la solució d'una equació diferencial estocàstica. Seguidament veurem una aplicació del càlcul de Malliavin a un problema clàssic d'estimació paramètrica, que consisteix a demostrar si un model té la propietat de normalitat local asimptòtica. De nou, un exemple d'aquest tipus de model pot ser la solució d'una equació diferencial estocàstica amb coeficients que depenguin d'un paràmetre que es desitja estimar. El darrer problema que estudiarem és la utilització de la fórmula d'integració per parts per calcular numèricament les gregues en el model de Black i Scholes, que són uns paràmetres que tenen un paper important dins dels mercats financers.

4.1 Existència i fites de densitats

El càlcul de Malliavin permet obtenir criteris per demostrar que una variable aleatòria té densitat i que aquesta densitat és una funció infinitament diferenciable. De fet, tal com hem esmentat en la introducció, Paul Malliavin va introduir el càlcul de variacions estocàstic per tractar el cas d'una equació diferencial estocàstica pertorbada per un moviment brownià $(B(t), t \in [0, T])$ d-dimensional, és a dir,

$$dX(t) = \sigma(X(t))dB(t) + b(X(t))\,\mathrm{d}t, \quad \text{per a tot } t \in]0, T]. \tag{4.1}$$

Suposem que la condició inicial és $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^m$ i que els coeficients $\sigma_j, b\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ són funcions Lipschitz. Els vectors $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ denoten les columnes de la matriu $m \times d$, σ. Sota aquestes condicions, se sap que existeix una única solució $X = (X(t), t \in [0, T])$ d'aquesta equació, on X és un procés m-dimensional, continu i adaptat a la filtració del moviment brownià.

Llavors, Malliavin va demostrar que sota l'anomenada *hipòtesi d'hipoellipticitat* sobre els coeficients σ i b, per a cada $t \in]0, T]$, la variable aleatòria $X(t)$ té una densitat infinitament diferenciable. La hipòtesi d'hipoel·lipticitat diu que els coeficients de la matriu σ i del vector b són funcions infinitament diferenciables i amb derivades parcials fitades, i l'espai vectorial generat pels vectors

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_d, \; [\sigma_i, \sigma_j], \; 0 \le i, j \le d, \quad [\sigma_i, [\sigma_j, \sigma_k]], \, 0 \le i, j, k \le d \ldots$$

en el punt x_0 és tot l'espai $\mathbb{R}^m$, on $[\sigma_i, \sigma_j]$ denota el parèntesi de Lie dels vectors σ_i i σ_j, i

$$\sigma_0 = b - \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{d} \sum_{i,j=1}^{m} \sigma_{i\ell} \partial_i \sigma_{j\ell}.$$

Aquest és, doncs, l'enunciat probabilístic del teorema de Hörmander que Malliavin va demostrar en el seu article [12] utilitzant el seu càlcul diferencial.

Observem que si $d = m = 1$, la condició d'hipoel·lipticitat diu que o bé $\sigma(x_0) \neq 0$, o bé existeix un $n \geq 1$ tal que $\sigma^{(n)}(x_0)b(x_0) \neq 0$, on $\sigma^{(n)}$ denota la derivada n-èsima de σ. El cas particular en què $m = d$ i $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ generen tot l'espai $\mathbb{R}^d$ en qualsevol punt s'anomena *hipòtesi d'el·lipticitat*.

Per demostrar el teorema de Hörmander es poden utilitzar criteris generals d'existència i regularitat de densitats. Per exemple, per al cas unidimensional, com a conseqüència de la fórmula d'integració per parts (3.5), es té el criteri següent d'existència i continuïtat de la densitat que, a més, ens dóna una fórmula explícita per a la densitat d'una variable aleatòria derivable en el sentit de Malliavin.

PROPOSICIÓ 2. *Sigui $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria dins de $\mathcal{D}^{1,2}$ i tal que el procés estocàstic $\frac{DF}{\|DF\|_2^2}$ pertany a $\operatorname{Dom}\delta$. Llavors la llei de F té una densitat fitada i contínua donada per*

$$p(x) = \mathrm{E}\Big[1_{\{F>x\}}\delta\Big(\frac{DF}{\|DF\|_2^2}\Big)\Big]. \tag{4.2}$$

Formalment, per demostrar la fórmula (4.2), n'hi ha prou d'aplicar la fórmula d'integració per parts (3.6) a la funció $f = 1_{[a,b]}$, on $[a,b]$ és un interval de $\mathbb{R}$, i utilitzar el teorema de Fubini. En efecte, tenim

$$\begin{aligned} P(F \in [a,b]) = \mathrm{E}[1_{[a,b]}(F)] &= \mathrm{E}\left[\left(\int_{-\infty}^{F} 1_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x\right)\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_2^2}\right)\right] = \\ &= \int_a^b \mathrm{E}\left[1_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|_2^2}\right)\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Això demostraria l'existència de la densitat i la seva expressió (4.2). Ara bé, la funció $f = 1_{[a,b]}$ no és diferenciable, propietat que és una hipòtesi necessària per aplicar la proposició 1. Per tant, per fer aquest càlcul de manera rigorosa, s'ha d'aplicar la fórmula (3.6) a una regularització diferenciable de la funció f, i passar al límit utilitzant el teorema de convergència dominada.

Per al cas de vectors aleatoris d-dimensionals, és a dir, de la forma $F = (F^1, \dots, F^d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, on cada F^i, $i \in \{1, \dots, d\}$ és una variable aleatòria definida en el mateix espai de probabilitat, es té el criteri general següent d'existència de la densitat en el qual s'obté, a més, el seu caràcter C^∞.

TEOREMA 3. *Sigui $F = (F^1, \dots, F^d)\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vector aleatori tal que per a cada $i \in \{1, \dots, d\}$, F^i pertany a $\mathcal{D}^{k,p}$ per a tot $k \geq 1$ i $p > 1$. Suposem que la matriu $d \times d$ definida com*

$$(\gamma_F)_{ij} = \int_0^T D_t F^i D_t F^j \,\mathrm{d}t, \quad \textit{per a tot } i,j \in \{1, \dots, d\}$$

satisfà que

$$\mathrm{E}\left[(\det \gamma_F)^{-p}\right] < \infty, \quad \textit{per a tot } p > 1. \tag{4.3}$$

Llavors, la llei de F té una densitat C^∞ donada per

$$p(x) = \mathrm{E}[\mathbf{1}_{\{F>x\}} H_d(F)], \tag{4.4}$$

on la variable aleatòria $H_d(F)$ està definida com

$$H_d(F) = \delta\Big((\gamma_F^{-1} DF)^d \delta((\gamma_F^{-1} DF)^{d-1} \cdots \delta(\gamma_F^{-1} DF)^1) \cdots\Big).$$

La matriu aleatòria γ_F s'anomena *matriu de Malliavin* i observem que la condició (4.3) implica en particular que la matriu és invertible q. s. De fet, Bouleau i Hirsch van demostrar que la invertibilitat de la matriu de Malliavin juntament amb el fet que la variable (o vector) aleatòria pertanyi a $\mathcal{D}^{1,p}$ per a algun $p > 1$, són condicions suficients perquè aquesta tingui una densitat; vegeu [22, secció 2.1.3]. La prova de l'expressió de la densitat (4.4) del teorema 3 és similar a la de la proposició 2 però utilitzant la versió d-dimensional de la fórmula d'integració per parts (3.5). Per demostrar el caràcter C^∞ es necessita una versió més general de la fórmula d'integració per parts; vegeu [22, secció 2.1.4].

Aquest tipus de criteris d'existència i diferenciabilitat de densitats han estat aplicats en la literatura en diferents tipus d'equacions. Per exemple, en el cas on les variables o vectors aleatoris són solucions d'equacions diferencials estocàstiques pertorbades per un moviment brownià o per sorolls més complicats, i també en el cas d'equacions en derivades parcials estocàstiques, com per exemple, l'equació de la calor [18, 23], l'equació d'ones [20, 28, 29], l'equació de Burgers [11], o l'equació de Navier-Stokes [19].

Un cop sabem que una variable o vector aleatori té una densitat diferenciable, ens pot interessar trobar fites superiors i inferiors per a aquesta densitat per conèixer el seu comportament. En els exemples mencionats anteriorment, s'espera sovint que aquestes fites siguin de tipus gaussià. Kusuoka i Stroock van ser els primers a utilitzar el càlcul de Malliavin per demostrar en l'article [10] que, sota la hipòtesi d'hipoel·lipticitat, en el cas en què b es pot escriure com una combinació lineal dels vectors σ_j, per a cada $x \in \mathbb{R}^m$, la densitat del vector $X(t)$ solució de (4.1), satisfà una fita inferior i superior de tipus gaussià. En particular, sota la hipòtesi més forta d'el·lipticitat i amb b general, la densitat admet les fites gaussianes següents:

$$c_1\, t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\|y - x_0\|^2}{c_2\, t^{\frac{1}{2}}}\right) \le p_t(y) \le C_1\, t^{-\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{\|y - x_0\|^2}{C_2\, t^{\frac{1}{2}}}\right), \tag{4.5}$$

on les constants c_1, c_2, C_1, C_2 depenen de les fites dels coeficients de σ, b i les seves derivades, de T i de la constant d'el·lipticitat. Aquest tipus de fites es coneixien també com a *mètodes analítics*; vegeu [3, 30].

Per demostrar la fita superior s'utilitza la fórmula (4.4) del teorema 3, juntament amb la desigualtat de Cauchy-Schwarz i la desigualtat exponencial per martingales. Per tant, la fórmula (4.4) dóna un mètode molt útil per a obtenir fites superiors per densitats que es pot aplicar en diferents situacions com hem esmentat anteriorment. L'obtenció de fites inferiors de tipus gaussià és més delicada que les fites superiors i és, actualment, un camp de recerca molt actiu en què la utilització del càlcul de Malliavin té un paper important. Per al cas de l'equació diferencial estocàstica (4.1), es té el mètode de Kusuoka i Stroock, però aquest mètode resulta ser molt tècnic i difícil d'aplicar en altres tipus d'equacions. Kohatsu-Higa va utilitzar algunes de les idees de Kusuoka i Stroock i va construir en [7] un mètode general per obtenir fites inferiors de tipus gaussià, que ell mateix va aplicar en el mateix article a l'equació de la calor estocàstica amb dimensió de l'espai 1 i a difusions del tipus (4.1), amb coeficients que depenen també del temps en [8].

Recentment, Nourdin i Viens [21] han desenvolupat un nou mètode utilizant també tècniques de càlcul de Malliavin per demostrar que una variable o vector aleatori té una densitat. Aquest mètode també permet obtenir una fórmula explícita per a la densitat que es pot utilitzar per trobar fites superiors i inferiors de tipus gaussià. Per exemple, Nualart i Quer-Sardanyons en [24, 25] han aplicat aquest mètode per obtenir fites gaussianes per a les equacions de la calor i d'ones amb dimensió de l'espai superior a 1 i pertorbades per un soroll gaussià additiu. Per ara, sembla que el mètode de Nourdin i Viens no s'aplica en el cas que el soroll és també multiplicatiu, com per exemple en l'equació (4.1). Per al cas de l'equació de la calor amb dimensió de l'espai superior a 1 i soroll gaussià multiplicatiu, Nualart i Quer-Sardanyons han aplicat en l'article recent [27] el mètode de Kohatsu-Higa esmentat anteriorment per obtenir una minoració gaussiana que coincideix amb la majoració que s'obté aplicant la fórmula (4.4).

A continuació, presentarem un altre mètode introduït per Malliavin i Nualart [16] (vegeu també [26] per al cas unidimensional) per obtenir fites inferiors de densitats, basat en el concepte de *camp aleatori recobridor* d'una variable (o vector) aleatòria, que està directament relacionat amb la fórmula d'integració par parts. Comencem, doncs, per definir aquest concepte.

Sigui $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria dins de $\mathcal{D}^{1,2}$. Direm que un procés estocàstic $u \in L^2([0,T]\times\Omega)$ és un camp aleatori recobridor de F si u pertany a $\operatorname{Dom}\delta$ i

$$\int_0^T D_t F u(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad q.\,s.$$

Observem que si u és un camp aleatori recobridor de F i f és una funció diferenciable amb derivada fitada es compleix que

$$\mathrm{E}[f'(F)] = E[f(F)\delta(u)].$$

En efecte, n'hi ha prou d'aplicar la fórmula d'integració per parts (3.5) amb $G = 1$. Per tant, si u és un camp aleatori recobridor de F, llavors u satisfà la fórmula d'integració per parts (3.5) amb $H_u(F,G) = \delta(u)$.

Per exemple, és fàcil demostrar que el processos $u(t) = \frac{D_t F}{\|DF\|^2}$ i $u(t) = \frac{1}{T D_t F}$ són camps aleatoris recobridors de F.

Amb Paul Malliavin, vam demostrar en [16] la fita inferior següent per a la densitat de vectors aleatoris tals que existeix un camp aleatori recobridor pel qual la seva integral de Skorohod satisfà un moment exponencial. Per simplificar la notació, enunciarem només el resultat per a variables aleatòries.

Teorema 4. *Sigui $F\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatòria dins de $\mathcal{D}^{3,p}$ per a tot $p > 1$, tal que la variable aleatòria $\|DF\|_2^{-1}$ pertany a $L^p(\Omega)$ per a tot $p > 1$. Llavors, si existeix un camp aleatori recobridor de F, u, i dues constants $\gamma > 1$ i $c > 0$ tals que*

$$\mathrm{E}\Big[\exp(c\,|\delta(u)|^{\gamma})\Big] < \infty,$$

la llei de F té una densitat diferenciable $p(x)$ que satisfà la fita inferior següent

$$p(x) \geq c_{\gamma} \exp(-c_{\gamma}|x|^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}), \quad \textit{per a tot } x \in \mathbb{R}.$$

La demostració d'aquest resultat es basa en la resolució d'un problema variacional d'anàlisi; vegeu [16, 26].

A continuació veurem l'aplicació d'aquest resultat a la solució de l'equació diferencial estocàstica (4.1) amb $m = d = 1$. Suposarem que $X(0) = 0$ i que els coeficients $\sigma, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ són funcions dins de $C^3(\mathbb{R})$ amb derivades fitades. Suposarem també la hipòtesi d'el·lipticitat, que en dimensió 1 consisteix a suposar que existeix una constant $c > 0$ tal que per a tot $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma(x)| \geq c$.

Per a $t > 0$ fixat, definim el procés següent

$$u(r) = \frac{1}{t}\frac{1}{\sigma(X(t))} \exp\Big(-\int_r^t \lambda(X(s))\, \mathrm{d}s\Big), \quad r \leq t, \tag{4.6}$$

on $\lambda = b' - \frac{\sigma'}{\sigma}b - \frac{1}{2}\sigma''\sigma$. Llavors, es pot demostrar que el procés $(u(r), r \leq t)$ és un camp aleatori recobridor de $X(t)$.

Si suposem ara que λ, $\lambda'\sigma$, σ' estan fitades, es pot demostrar utilizant la desigualtat maximal per martingales que existeix una constant $c(t) > 0$ per la qual

$$\mathrm{E}[\exp(c(t)\,|\delta(u)|^2)] < \infty. \tag{4.7}$$

Aleshores, tenim que pel teorema 4, per a tot $t \in\,]0, T]$, $X(t)$ admet una densitat diferenciable que satisfà la fita inferior següent:

$$p_t(x) \geq c \exp(-c|x|^2), \quad \text{per a tot } x \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

on la constant c depèn de t i de les fites sobre els coeficients i les seves derivades.

És important observar que el camp aleatori recobridor de $X(t)$ definit en (4.6) és un procés que no és adaptat. Per tant, en aquest cas, la integral de Skorohod $\delta(u)$ no coincideix amb la integral d'Itô de u. Per demostrar (4.7), podem utilitzar el truc mencionat en la secció anterior, que consisteix a escriure el procés u com el producte d'una variable aleatòria i un procés adaptat, és a dir,

$$u(r) = \frac{1}{t}\frac{1}{\sigma(X(t))}\exp\Big(-\int_0^t \lambda(X(s))\,\mathrm{d}s\Big)\exp\Big(\int_0^r \lambda(X(s))\,\mathrm{d}s\Big).$$

Llavors podem aplicar la fórmula (3.4) amb $F = \frac{1}{t}\frac{1}{\sigma\big(X(t)\big)}\exp\big(-\int_0^t \lambda(X(s))\,\mathrm{d}s\big)$ i $u(r) = \exp\big(\int_0^r \lambda(X(s))\,\mathrm{d}s\big)$, on u és ara un procés adaptat. La integral de Skorohod del procés adaptat sí que coincidirà, en aquest cas, amb la integral d'Itô, i podem utilitzar tècniques conegudes per finalment provar que (4.7) se satisfà. Aquest argument funciona en el cas d'una equació diferencial estocàstica en una dimensió, però es complica quan treballem amb vectors aleatoris.

4.2 Estimació paramètrica

La segona aplicació del càlcul de Malliavin que introduirem forma part del treball iniciat per Gobet en [5, 6] i desenvolupat per Corcuera i Kohatsu-Higa en [1]. En aquests treballs, els autors utilitzen el càlcul de Malliavin per demostrar les anomenades *propietat de normalitat asimptòtica local* (NAL) i *propietat de normalitat asimptòtica local mixta* (NALM) per a models d'estimació paramètrica. Els models que Gobet, Corcuera i Kohatsu-Higa estudien són equacions diferencials del tipus (4.1), amb coeficients que depenen d'un paràmetre θ que es desitja estimar.

Vegem primer què entenem per model d'estimació paramètrica i propietats NAL i NALM en un context general, i tot seguit explicarem com s'utilitza el càlcul de Malliavin per demostrar aquestes propietats seguint els models mencionats anteriorment.

Un model d'estimació paramètrica ve donat per un vector aleatori $X^n = (X_1, \ldots, X_n)$ en un espai de probabilitat $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, on la llei de X^n depèn d'un paràmetre $\theta \in \Theta$, on Θ és un interval obert de $\mathbb{R}$. És a dir, $X^n \colon \Omega \times \Theta \to E \subset \mathbb{R}^n \colon (\omega, \theta) \mapsto X^n(\omega, \theta)$. Suposarem que X^n té densitat (versemblança) $p_n(x, \theta)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Un dels objectius en aquest tipus de model és trobar bons estimadors del paràmetre θ, per tenir més informació sobre el model estadístic. Un estimador de θ és una funció $T \colon E \to \mathbb{R} \colon x \mapsto T(x)$ avaluada al vector X^n. Es diu que un estimador de θ o $g(\theta)$ és *bo* si té bones propietats, per exemple, si és sense biaix, és a dir, $\mathrm{E}_\theta[T(X^n)] = \theta$ o $g(\theta)$, o bé si té variància mínima, o bé si és asimptòticament normal, etc. D'altra banda, hi ha estimadors coneguts, com per exemple l'estimador de màxima versemblança, que se sap que té bones propietats. Tot i això, segons per a quin model estadístic, no és sempre el millor estimador.

Una propietat important d'un estimador és ser eficient. Un estimador eficient és aquell que satisfà la igualtat en la coneguda desigualtat de Cramér-Rao que recordarem a continuació. Aquesta desigualtat dóna una fita inferior per a la variància d'un estimador sense biaix. Es diu que un estimador és *asimptòticament eficient* si satisfà la igualtat de Cramér-Rao quan n tendeix a infinit.

PROPOSICIÓ 5. *Sigui T un estimador sense biaix de θ. Sota hipòtesis de regularitat sobre el model estadístic tenim*

$$\mathrm{Var}_\theta(T(X^n)) \geq \frac{1}{\mathrm{Var}_\theta(\partial_\theta \log p_n(X^n,\theta))} = \frac{1}{I(\theta)}.$$

$I(\theta)$ s'anomena informació de Fisher. *A més, es compleix que per a tot $\theta \in \Theta$ i quasi per a tot $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$\partial_\theta \log p_n(x,\theta) = -\frac{\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}(\mathrm{E}_\theta[\partial_\theta X_j | X^n = x] p_n(x,\theta))}{p_n(x,\theta)}. \tag{4.9}$$

La desigualtat de Cramér-Rao es demostra utilitzant la desigualtat de Cauchy-Schwarz. La igualtat (4.9) és una conseqüència de la fórmula d'integració per parts en $\mathbb{R}^n$.

D'altra banda, es diu que un model estadístic paramètric satisfà la propietat NAL amb velocitat de convergència n, si per a tot $\theta \in \Theta$ i $u \in \mathbb{R}$, quan n tendeix a infinit, el quocient de versemblances

$$\log \frac{p_n(X^n, \theta + \frac{u}{\sqrt{n}})}{p_n(X^n,\theta)}$$

convergeix en distribució cap a $uN(0,\Gamma(\theta)) - \frac{u^2}{2}\Gamma(\theta)$, per a una certa funció $\Gamma(\theta)$. En el cas que la funció $\Gamma(\theta)$ sigui una variable aleatòria, llavors es diu que el model satisfà la propietat NALM. S'obté llavors una llei gaussiana amb variància aleatòria, és a dir, una llei gaussiana condicionada per una altra variable aleatòria. En aquest cas, això vol dir que la distribució límit és gaussiana però depèn dels valors observats d'aquesta variable aleatòria.

Un cop sabem que un model estadístic satisfà la propietat NAL, els anomenats *teoremes minimax* permeten demostrar que asimptòticament es compleix $I(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\theta)}$ en la proposició 5. Per tant, la propietat NAL ens dóna la fita inferior de Cramér-Rao. Els mateixos teoremes minimax permeten construir estimadors asimptòticament eficaços, és a dir, que satisfan la igualtat en la desigualtat de Cramér-Rao quan n tendeix a infinit. D'aquí la importància d'aquestes propietats dels models estadístics.

A continuació explicarem quin paper té el càlcul de Malliavin dins d'aquest problema d'estimació paramètrica. La idea ve donada en el resultat següent, demostrat per Corcuera i Kohatsu-Higa en [1], que és una generalització de la desigualtat de Cramér-Rao per al cas que el model estadístic X^n no té forçosament una densitat. És a dir, si el model té una versemblança coneguda, llavors demostrar la propietat NAL i trobar la informació de Fisher $I(\theta)$ es pot fer directament treballant amb la funció de densitat. Ara bé, si la densitat no es coneix explícitament, el resultat següent dóna una via per fer els càlculs utilitzant la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin.

TEOREMA 6. *Suposem que les variables aleatòries X_j pertanyen a $\mathcal{D}^{1,2}$ per a tot $j = 1,\dots,n$. Suposem que existeix un procés estocàstic $u \in L^2([0,T]\times\Omega)$ dins* *de* Dom δ *tal que, per a tot* $j = 1, \dots, n$*, es compleix que*

$$\int_0^T D_t X_j u(t)\,\mathrm{d}t = \partial_\theta X_j \quad q.\ s. \tag{4.10}$$

Sigui T *un estimador sense biaix de* θ*. Llavors, sota hipòtesis de regularitat sobre el model estadístic tenim que*

$$\mathrm{Var}_\theta(T(X^n)) \geq \frac{1}{\mathrm{Var}_\theta(\mathrm{E}_\theta[\delta(u)|X^n])}.$$

En el cas que X^n *tingui una densitat, llavors* $\mathrm{E}_\theta[\delta(u)|X^n = x] = \partial_\theta \log p_n(x, \theta)$ *q. s. i es compleix la desigualtat clàssica de Cramér-Rao.*

Prova. Primer demostrarem que la condició (4.10) implica que

$$\partial_\theta \mathrm{E}_\theta[T(X^n)] = \mathrm{E}_\theta[T(X^n)\delta(u)]. \tag{4.11}$$

En efecte, per la regla de la cadena tenim que $DT(X^n) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} T(X^n) DX_k$. Utilitzant la condició (4.10) i la relació de dualitat (3.3) obtenim que

$$\begin{aligned}\partial_\theta \mathrm{E}_\theta[T(X^n)] &= \sum_{k=1}^n \mathrm{E}_\theta[\partial_{x_k} T(X^n) \partial_\theta X_k] = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}_\theta[\partial_{x_k} T(X^n) \langle DX_k, u\rangle] = \\ &= \mathrm{E}_\theta[\langle DT(X^n), u\rangle] = \mathrm{E}_\theta[T(X^n)\delta(u)].\end{aligned}$$

Aplicant la desigualtat de Cauchy-Schwarz i utilitzant el fet que $\partial_\theta \mathrm{E}_\theta[T(X^n)] = 1$ i que $\mathrm{E}_\theta[T(X^n)\delta(u)] = \mathrm{E}_\theta[T(X^n)\mathrm{E}_\theta[\delta(u)|X^n]]$, concloem el resultat desitjat. $\square$

Observem que la fórmula (4.11) per al cas $n = 1$ és una conseqüència de la fórmula d'integració per parts (3.5), si prenem $G = \partial_\theta X^n$, $f = T$ i u tal que $\langle DX^n, u\rangle = \partial_\theta X^n$ (condició (4.10)). Així doncs, el procés u del teorema 6 té el mateix paper que el procés u de la fórmula d'integració per parts (3.5). A la pràctica, no és únic, i s'ha de triar de manera adequada.

Vegem ara una aplicació d'aquest resultat. Considerem l'anomenat *procés d'Ornstein-Uhlenbeck*, que és el procés estocàstic $(X(t), t \geq 0)$ solució de l'equació diferencial estocàstica

$$dX(t) = -\theta X(t)\,\mathrm{d}t + dB(t), \quad \text{per a tot } t \geq 0,$$

amb condició inicial $X(0) = 0$. Observem que es tracta d'una equació lineal que podem resoldre explícitament. Es té que $X(t) = \int_0^t e^{-\theta(t-s)}\,\mathrm{d}B(s)$ i, per tant, el procés d'Ornstein-Uhlenbeck és un procés gaussià d'esperança zero i variància $\int_0^t e^{-2\theta(t-s)}\,\mathrm{d}s$. En particular, aquest model estadístic té una densitat explícita, per tant, els càlculs que farem a continuació podrien fer-se directament utilitzant la densitat explícita del model. Però, per veure un exemple d'aplicació del teorema 6, explicarem com es demostra la propietat NAL per a aquest model utilitzant el càlcul de Malliavin.

Per fer-ho, considerem una mostra aleatòria d'aquest model paramètric, $X^n = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ on $\{t_1, \dots, t_n\}$ és una partició de l'interval $]0, T]$, és a dir $0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. A més, triarem aquesta partició de manera que si definim $\Delta_n := t_i - t_{i-1}$, llavors $\Delta_n \to 0$ i $T = n\Delta_n \to \infty$ quan n tendeix a infinit.

Per poder aplicar el teorema 6, hem de trobar un procés u que satisfaci l'equació (4.10). Observem que, per a cada $j = 1, \dots, n$, la variable aleatòria $X(t_j)$ s'escriu com una integral de Wiener, i la seva derivada de Malliavin ve donada per $D_s X(t_j) = e^{-\theta(t_j - s)} 1_{[0,t_j]}(s)$. A més, observem que la derivada del procés d'Ornstein-Uhlenbeck X respecte de θ satisfà l'equació diferencial següent

$$d(\partial_\theta X(t)) = -X(t)\,\mathrm{d}t - \theta(\partial_\theta X(t))\,\mathrm{d}t.$$

Deduïm, doncs, que $\partial_\theta X(t_j) = -\int_0^T X(s) D_s X(t_j)\,\mathrm{d}s$ i podem prendre $u = -X$ en (4.10).

Considerem, per a tot $u \in \mathbb{R}$, la variable aleatòria

$$Z_n(\theta, \theta + \frac{u}{\sqrt{n\Delta_n}}) = \log p_n(X^n, \theta + \frac{u}{\sqrt{n\Delta_n}}) - \log p_n(X^n, \theta).$$

Llavors, el teorema 6 ens diu que

$$\partial_\theta \log p_n(X^n, \theta) = -\mathrm{E}_\theta[\delta(X)|X^n]. \tag{4.12}$$

D'altra banda, com que X és un procés adaptat tenim $\delta(X) = \int_0^T X(s)\,\mathrm{d}B(s)$. Així doncs, el càlcul de Malliavin ens permet escriure la variable aleatòria $Z_n(\theta, \theta + \frac{u}{\sqrt{n\Delta_n}})$ en termes de l'esperança condicionada d'una integral d'Itô que sabem manipular. Llavors, utilitzant el fet que X és un procés ergòdic amb mesura invariant $N(0, \frac{1}{2\theta})$, és a dir,

$$\frac{1}{T}\int_0^T X^2(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow{P} \frac{1}{2\theta},$$

es pot demostrar que, per a tot $u \in \mathbb{R}$, quan n tendeix a infinit,

$$Z_n(\theta, \theta + \frac{u}{\sqrt{n\Delta_n}}) \xrightarrow{d} uN(0, \frac{1}{2\theta}) - \frac{u^2}{4\theta}, \tag{4.13}$$

on $\xrightarrow{P}$ denota la convergència en probabilitat i $\xrightarrow{d}$ la convergència en distribució. És a dir, aquest model satisfà la propietat NAL amb velocitat de convergència $n\Delta_n$ i variància $\Gamma(\theta) = \frac{1}{2\theta}$. En aquest cas, Corcuera i Kohatsu-Higa utilitzen (4.12) per demostrar aquest resultat, com a exemple d'aplicació del teorema 6. Tot i així, com hem esmentat anteriorment, per a models gaussians i ergòdics com aquest, la convergència en distribució (4.13) es pot demostrar directament sense passar pel càlcul de Malliavin, utilitzant la forma explícita de la versemblança.

Vegem ara un segon exemple tractat en [5, 1] de model paramètric en què la densitat no es coneix explícitament i s'utilitza el càlcul de Malliavin per demostrar la propietat NALM. És el cas d'una equació diferencial estocàstica del tipus (4.1) amb coeficients que depenen del temps i d'un paràmetre θ que es desitja estimar, és a dir,

$$dX(t) = \sigma(t,\theta,X(t))dB(t) + b(t,\theta,X(t))\,\mathrm{d}t, \quad \text{per a tot } t \in\ ]0,1]\,, \tag{4.14}$$

amb $X(0) = x$. En [1] els autors estudien el cas unidimensional d'aquesta equació; Gobet [5] tracta el cas multidimensional. Per simplificar la notació, exposarem el resultat unidimensional. Suposem que b i σ són funcions $C^{1,3,3}$, uniformement fitades, amb derivades uniformement fitades i σ uniformement el·líptica. Considerem una mostra aleatòria d'aquest model paramètric, $X^n = (X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ on $\{t_1,\dots,t_n\}$ és la partició de l'interval $]0,1]$ definida com $t_i = i\Delta_n$, és a dir, $n\Delta_n = 1$. Considerem per a tot $u \in \mathbb{R}$,

$$Z_n(\theta,\theta+\frac{u}{\sqrt{n}}) = \log p_n(X^n,\theta+\frac{u}{\sqrt{n}}) - \log p_n(X^n,\theta).$$

Llavors, Corcuera i Kohatsu-Higa [1] demostren que, per a tot $u \in \mathbb{R}$, quan n tendeix a infinit,

$$Z_n(\theta,\theta+\frac{u}{\sqrt{n}}) \xrightarrow{d} u\int_0^1 \sqrt{2}\,\frac{\partial_\theta\sigma(s,\theta,X(s))}{\sigma(s,\theta,X(s))}\,\mathrm{d}W(s) - \frac{u^2}{2}\int_0^1 2\left(\frac{\partial_\theta\sigma(s,\theta,X(s))}{\sigma(s,\theta,X(s))}\right)^2 \mathrm{d}s,$$

on $W = (W(t), t \in [0,1])$ és un moviment brownià independent de B. Per tant, aquest model satisfà la propietat NALM ja que donat el procés $(X(t), t \in\ ]0,1])$, la variable aleatòria $\int_0^1 \sqrt{2}\frac{\partial_\theta\sigma(s,\theta,X(s))}{\sigma(s,\theta,X(s))}\,\mathrm{d}W(s)$ és gaussiana amb esperança zero i variància

$$\int_0^1 2\left(\frac{\partial_\theta\sigma(s,\theta,X(s))}{\sigma(s,\theta,X(s))}\right)^2 \mathrm{d}s.$$

En aquest cas, la distribució límit està condicionada per les trajectòries del procés X en tot l'interval.

Per demostrar aquest resultat de convergència en distribució, els autors utilitzen, d'una banda, el seu teorema 6 triant un procés u adequat. D'altra banda, també utilitzen un resultat de fites superiors i inferiors de la densitat del model del tipus (4.5). Com s'ha dit més amunt, Gobet [5] ja havia demostrat en un treball anterior la versió multidimensional d'aquest resultat, amb tècniques similars de càlcul de Malliavin però amb una notació una mica diferent. El treball de [1] generalitza el treball de Gobet amb vista a poder tractar altres tipus d'equacions, com per exemple, les equacions diferencials estocàstiques amb salts.

Finalment, el treball de Gobet [6] considera una difusió multidimensional del tipus (4.14) amb coeficients que depenen de θ i de $X(t)$ amb $t \ge 0$. Considera una mostra aleatòria $X^n = (X_{t_1},\dots,X_{t_n})$ amb $\Delta_n \to 0$ i $n\Delta_n \to \infty$ quan n

tendeix a infinit, és a dir, en tota la recta $\mathbb{R}_+$ com en el cas del procés d'Ornstein-Uhlenbeck. Sota hipòtesis sobre σ i b que, en particular, asseguren l'ergodicitat del procés X, Gobet demostra la propietat NAL per a aquest model utilizant les tècniques de càlcul de Malliavin.

4.3 Càlcul numèric de gregues

La darrera aplicació del càlcul de Malliavin consisteix a utilitzar la seva fórmula d'integració per parts per calcular les gregues, que són uns paràmetres que intervenen en un tipus d'instruments financers derivats anomenats *opcions*. Una exposició extensa sobre les aplicacions del càlcul de Malliavin a les matemàtiques financeres es pot trobar en [17, 22].

Comencem, doncs, introduint el concepte d'*opció*. Suposem que un inversor té una cartera d'accions amb una rendibilitat mitjana superior al tipus d'interès fix, però que necessita garantir un capital determinat en un cert temps. Una opció de venda (*put*) o de compra (*call*) és un contracte que li permet vendre o comprar les seves accions a un preu d'exercici K i a una data de venciment T fixats prèviament en el contracte. És a dir, si el propietari de l'opció decideix exercir el seu dret garantit en el contracte, l'emissor del contracte té l'obligació de comprar o vendre les accions al preu d'exercici fixat. D'altra banda, una opció té un preu inicial anomenat *prima* que l'inversor ha de pagar a l'emissor per poder beneficiar-se del contracte.

Anomenem $(S(t), 0 \leq t \leq T)$ el preu d'una acció en el mercat en la data $t \in [0, T]$. En un *put*, si el preu de les accions en la data T és superior al preu d'exercici, l'inversor no té interès a exercir la seva opció, ja que és més rendible vendre les seves accions directament al mercat. D'altra banda, si el preu és inferior, vendrà les seves accions a l'emissor al preu K per, després, comprar-les al preu $S(T)$, de manera que obté un benefici de $K - S(T)$. Per tant, el valor d'un *put* en la data de venciment és igual a $\max(K - S(T), 0)$. Anàlogament, el valor d'un *call* a l'instant T és igual a $\max(S(T) - K, 0)$.

Es planteja llavors el problema següent: quin és el valor òptim de la prima que compensi alhora l'inversor i l'emissor del contracte? És l'anomenat *problema de valoració* o *pricing* d'opcions. Per tal de resoldre aquest problema s'intenta trobar una estratègia que permeti cobrir el possible benefici (el valor inicial de l'estratègia és la prima). És l'anomenat *problema de cobertura* o *hedging* d'opcions.

Les opcions són exemples dels anomenats *instruments financers derivats*, el valor dels quals depèn d'una acció o actiu subjacent. Actualment, els mercats de derivats són tan actius com les mateixes borses. Històricament, els mercats de derivats van aparèixer als Estats Units en els anys setanta, i en els anys noranta van començar a operar a l'Estat espanyol, amb seus a Barcelona i Madrid.

En els anys trenta i quaranta, diversos economistes van observar que el logaritme dels preus de diferents actius es comporta com un moviment brownià

$(B(t), t \in [0,T])$. Samuelson, el 1965, escriu

$$S(t) = x \exp(\mu t + \sigma B(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t), \tag{4.15}$$

on $x = S(0)$, σ és la volatilitat i el paràmetre μ representa la tendència a créixer.

Aquest model s'anomena *model de Black i Scholes* perquè va ser utilitzat pels autors Fisher Black i Myron Scholes per resoldre el problema de valoració i cobertura d'opcions de compra el 1973, en el cas que el preu de les accions en el mercat satisfaci (4.15). En particular, el valor d'un *call* a l'instant $t \in [0,T]$ ve donat per la fórmula

$$V(t) = e^{-r(T-t)} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}_t],$$

on $r > 0$ és el tipus d'interès, $(\mathcal{F}_t, t \in [0,T])$ és la filtració del moviment brownià i Q és una mesura de probabilitat sota la qual el procés $(\tilde{B}(t), t \in [0,T])$ definit com $\tilde{B}(t) = B(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} t$ és un moviment brownià, donada pel teorema de Girsanov.

En general, el preu inicial d'una opció ve donat per

$$V(0) = e^{-rT} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h(S(T))\Big], \tag{4.16}$$

on $h(S(T))$ és l'anomenat *payoff* de l'opció, és a dir, el capital que l'emissor de l'opció vol garantir a la data de venciment. Per exemple, en el cas d'un *call*, $h(x) = \max(x - K, 0)$.

Les anomenades *opcions exòtiques* o productes derivats més generals tenen *payoff* de la forma $H \geq 0$, on H és una variable aleatòria $\mathcal{F}_T$-mesurable i tal que $\mathrm{E}_Q[H^2] < \infty$. En aquest cas,

$$V(0) = e^{-rT} \mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[H].$$

Per exemple, en les opcions asiàtiques, el *payoff* depèn del valor mitjà dels preus de l'acció fins a la data de venciment, és a dir, $H = h(\bar{S}(T))$ on $\bar{S}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T S(t)\, \mathrm{d}t$.

Una grega és la derivada del preu inicial d'una opció respecte de qualsevol dels paràmetres del model x, r, σ, T, K. Per tant, les gregues mesuren l'estabilitat d'una opció segons les variacions dels diferents paràmetres. Les gregues més utilitzades són la Delta, la Gamma i la Vega, definides, respectivament, com

$$\Delta = \frac{\partial V(0)}{\partial x}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V(0)}{\partial x^2}, \quad \vartheta = \frac{\partial V(0)}{\partial \sigma}.$$

Suposem ara que estem en el cas (4.16) d'un *payoff* de la forma $h(S(T))$ sota el model de Black i Scholes. Utilitzant la fórmula d'integració per parts (proposició 1) del càlcul de Malliavin on α és qualsevol dels paràmetres (x, r, σ, T, K), tenim que

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(0)}{\partial \alpha} &= e^{-rT}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h'(S(T))\frac{\partial S(T)}{\partial \alpha}\Big] = \\ &= e^{-rT}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h(S(T))H_u\Big(S(T),\frac{\partial S(T)}{\partial \alpha}\Big)\Big].\end{aligned} \tag{4.17}$$

Observem que com que $S(T)$ té una densitat, n'hi ha prou de suposar h Lipschitz. En els casos en què h no és Lipschitz, la fórmula anterior també és vàlida per a un argument d'aproximació. D'altra banda, de la mateixa manera que hem vist en les dues aplicacions anteriors de la fórmula d'integració per parts, observem que per calcular una grega explícitament hem d'escollir el procés u de manera adequada.

A continuació, farem el càlcul explícit per al cas de la Delta. Tenim que

$$\Delta = \frac{\partial V(0)}{\partial x} = e^{-rT}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h'(S(T))\frac{\partial S(T)}{\partial x}\Big] = \frac{e^{-rT}}{x}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h'(S(T))S(T)\Big].$$

Aplicant la proposició 1 amb $F = S(T)$, $G = S(T)$ i prenent $u = 1$ obtenim que

$$\Delta = \frac{e^{-rT}}{x\sigma T}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}[h(S(T))\tilde{B}(T)]. \tag{4.18}$$

Recordem que $\tilde{B}(t) = B(t) + \frac{\mu-r}{\sigma}t$, $t \in [0,T]$, és un moviment brownià sota la probabilitat Q. Observem que en aquest cas hem escollit el procés u com el procés constant igual a 1.

La fórmula (4.18) permet calcular el valor de la Delta, per exemple, en el cas d'opcions de compra o venda. En aquest cas, com que la densitat de $S(T)$ és explícita, el càlcul de la Δ es pot fer directament sense utilitzar el càlcul de Malliavin i s'obté

$$\Delta = \Phi\Big(\frac{\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\Big), \tag{4.19}$$

on $\Phi(x)$ denota la funció de repartició d'una variable aleatòria $N(0,1)$. Llavors, es pot demostrar que la fórmula (4.18) coincideix amb (4.19) en el cas d'un *call*.

Per al cas de les opcions exòtiques com, per exemple, les opcions asiàtiques, la densitat del *payoff* no es coneix explícitament, i en aquest cas el càlcul de Malliavin té un paper crucial per al càlcul de gregues.

Vegem l'exemple de la Delta d'una opció asiàtica, és a dir,

$$\Delta = \frac{\partial V(0)}{\partial x} = e^{-rT}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h'(\bar{S}(T))\frac{\partial \bar{S}(T)}{\partial x}\Big] = \frac{e^{-rT}}{x}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h'(\bar{S}(T))\bar{S}(T)\Big].$$

Utilitzant la proposició 1 amb $F = \bar{S}(T)$, $G = \bar{S}(T)$ i $u(t) = S(t)$, obtenim que

$$\Delta = \frac{2e^{-rT}}{x\sigma^2}\mathrm{E}_{\mathrm{Q}}\Big[h(\bar{S}(T))\Big(\frac{S(T)-x}{T\bar{S}(T)} - r + \frac{\sigma^2}{2}\Big)\Big]. \tag{4.20}$$

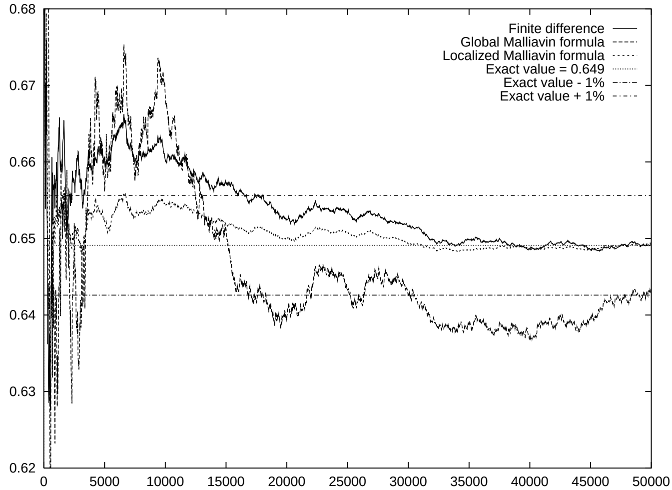

FIGURA 1: Simulació de la Delta d'un *call* asiàtic.

Observem que, en aquest cas, si intentem aplicar la fórmula d'integració per parts i prenem $u = 1$, no s'obté una fórmula explícita de la Δ com en el cas de les opcions amb *payoff* del tipus $h(S(T))$, ja que el càlcul resulta massa difícil. Prenent u igual al procés S, hi ha termes que es cancel·len i s'obté la fórmula (4.20) que, com explicarem a continuació, és pràctica per fer càlculs numèrics.

L'expressió per a les gregues (4.17) obtinguda mitjançant la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin permet calcular les gregues numèricament pel mètode de Monte Carlo. Un avantatge important d'aquesta fórmula és que la variable aleatòria $H_u(S(T), \frac{\partial S(T)}{\partial \alpha})$ no depèn de la funció *payoff* h. Per al cas de *payoffs* discontinus, aquest mètode sembla ser més eficient que, per exemple, calcular les gregues directament utilitzant les diferències finites i el mètode de Monte Carlo; vegeu [4, 9] per a una comparació dels diferents mètodes.

En l'article [4], els autors calculen numèricament el valor de la Delta d'una opció asiàtica de compra utilitzant tres mètodes diferents (vegeu la figura 1). El primer és el mencionat anteriorment, on s'aproxima la derivada per diferències finites i l'esperança per Monte Carlo. El segon mètode consisteix a aplicar el mètode de Monte Carlo a la fórmula per a la Delta (4.20) obtinguda amb la integració per parts del càlcul de Malliavin. Quan s'implementa aquest mètode, apareix el problema numèric següent. Quan apliquem la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin, apareix la variable aleatòria H que, per exemple, com hem vist en el cas d'un *call* (4.18) és un moviment brownià. En el cas d'un *call* asiàtic obtenim que H és igual a $\frac{S(T)-x}{T\bar{S}(T)} - r + \frac{\sigma^2}{2}$ (fórmula (4.20)). Aquesta variable aleatòria H pot fer anar a ralentí les simulacions de

Monte Carlo. Per evitar aquest fenomen, els autors de [4] utilitzen una idea que consisteix a localitzar la fórmula d'integració per parts al voltant de la singularitat del *payoff*, en un interval de llargada 2δ. En la figura 1 (vegeu [4]) observem els valors obtinguts de la Delta d'un *call* asiàtic amb $x = 100$, $r = 0,1$, $\sigma = 0,2$, $T = 1$, $K = 100$, $\delta = 10$ i considerant fins a $n = 50.000$ successions quasialeatòries. Com es pot observar en la figura 1, el mètode de Monte Carlo aplicat a la fórmula per a la Δ obtinguda localitzant la fórmula d'integració per parts del càlcul de Malliavin sembla ser la més eficient en aquest cas.

Agraïments

L'autora vol agrair a la Societat Catalana de Matemàtiques la proposta de fer una conferència en la Tretzena Trobada Matemàtica dedicada a joves matemàtics catalans al món, que va tenir lloc el dia 11 de juny de 2010. Aquest treball és una extensió dels temes que es van presentar a la conferència.

Referències

[1] Corcuera, J. M.; Kohatsu-Higa, A. «Statistical Inference and Malliavin Calculus». A: *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications VI*, 2011.

[2] Dalang, R. C.; Nualart, E. «Potential theory for hyperbolic SPDEs». *Ann. Probab.*, 32 (2004), 2099–2148.

[3] Fefferman, C. L.; Sanchez-Calle, A. «Fundamental solutions of second order subelliptic operators». *Ann. Math.*, 124 (1986), 247–272.

[4] Fournier, E.; Lasry J.-M.; Lebuchoux, J.; Lions, P.-L.; Touzi, N. «Application of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance». *Finance Stoch.*, 3 (1999), 391–412.

[5] Gobet, E. «Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusions: a Malliavin calculus approach». *Bernoulli*, 7 (2001), 899–912.

[6] Gobet, E. «LAN property for ergodic diffusions with discrete observations». *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat.*, 38 (2002), 711–737.

[7] Kohatsu-Higa, A. «Lower bounds for densities of uniformly elliptic random variables on Wiener space». *Probab. Theory Related Fields*, 126 (2003), 421–457.

[8] Kohatsu-Higa, A. «Lower bounds for densities of uniformly elliptic nonhomogeneous diffusions». *Stochastic inequalities and applications. Progr. Probab.*, 56 (2003), 323–338.

[9] Kohatsu-Higa, A.; Montero, M. «Malliavin calculus in finance». A: *Handbook of computational and numerical methods in finance*. Boston: Birkhäuser, 2004, 111–174.

[10] KUSUOKA, S.; STROOCK, D. «Applications of the Malliavin calculus III». *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34 (1987), 391–442.

[11] LANJRI ZAIDI, N.; NUALART, D. «Burgers equation driven by space-time white-noise: absolute continuity of the solution». *Stochastics and Stochastics Reports*, 66 (3) (1999), 273–292.

[12] MALLIAVIN, P. «Stochastic calculus of variations and hypoelliptic operators». A: *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976*. Wiley, 1978, 195–263.

[13] MALLIAVIN, P. «C^∞-hypoellipticity with degeneracy». A: *Stochastic analysis. Proceedings of the International Conference, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1978*. Nova York; Londres: Academic Press, 1978, 199–214.

[14] MALLIAVIN, P. «C^∞-hypoellipticity with degeneracy II». A: *Stochastic analysis. Proceedings of the International Conference, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1978*. Nova York; Londres: Academic Press, 1978, 327–340.

[15] MALLIAVIN, P. *Stochastic analysis*. Nova York: Springer-Verlag, 1991.

[16] MALLIAVIN, P.; NUALART, E. «Density minoration of a strongly non-degenerated random variable». *J. Funct. Anal.*, 256 (2009), 4197–4214.

[17] MALLIAVIN, P.; THALMAIER, A. *Stochastic calculus of variations in mathematical finance*. Nova York: Springer-Verlag, 2006.

[18] MÁRQUEZ-CARRERAS, D.; MELLOUK, M.; SARRÀ, M. «On stochastic partial differential equations with spatially correlated noise: smoothness of the law». *Stochastic Process. Appl.*, 93 (2001), 269–284.

[19] MATTINGLY, J.C.; PARDOUX, E. «Malliavin calculus for the Stochastic 2D Navier Stokes Equation». *Comm. Pure Appl. Math.*, 59 (2006), 1742–1790.

[20] MILLET, A.; SANZ-SOLÉ, M. «A stochastic wave equation in two space dimension: smoothness of the law». *Ann. Probab.*, 27 (1999), 803–844.

[21] NOURDIN, I.; VIENS, F. «Density estimates and concentration inequalities with Malliavin calculus». *Electron. J. Probab.*, 14 (2009), 2287–2309.

[22] NUALART, D. *The Malliavin calculus and related topics*. Nova York: Springer-Verlag, 2006. [Segona edició]

[23] NUALART, D.; QUER-SARDANYONS, L. «Existence and smoothness of the density for spatially homogeneous SPDEs». *Potential Anal.*, 27 (2007), 281–299.

[24] NUALART, D.; QUER-SARDANYONS, L. «Gaussian density estimates for solutions to quasi-linear stochastic differential equations». *Stochastic Process. Appl.*, 119 (2009), 3914–3938.

[25] NUALART, D.; QUER-SARDANYONS, L. «Optimal Gaussian density estimates for a class of stochastic equations with additive noise». *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, 14 (2011), 25–34.

[26] Nualart, E. «Exponential divergence estimates and heat kernel tail». *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338 (2004), 77–80.

[27] Nualart, E.; Quer-Sardanyons, L. «Gaussian estimates for the density of the non-linear stochastic heat equation in any space dimension». *Stochastic Process. Appl.*, 122 (2012), 418–447.

[28] Quer-Sardanyons, L.; Sanz-Solé, M. «Absolute continuity of the law of the solution to the 3-dimensional stochastic wave equation». *J. Funct. Anal.*, 206 (2004), 1–32.

[29] Quer-Sardanyons, L.; Sanz-Solé, M. «A stochastic wave equation in dimension 3: Smoothness of the law». *Bernoulli*, 10 (2004), 165–186.

[30] Sanchez-Calle, A. «Fundamental solutions and geometry of the sum of square of vector fields». *Invent. Math.*, 78 (1986), 143–160.

[31] Sanz-Solé, M. *Malliavin calculus with applications to stochastic partial differential equations*. Lausanne, Suïssa: EPFL Press, 2005.

Institut Galilée
Universitat de París 13
93430 Villetaneuse, França
eulalia@nualart.es
http://nualart.es